

Formulario de Métodos Numéricos

1. Teoría de Errores

Error Absoluto (E_a) y Relativo (E_r):

$$E_a = |\text{Valor Verdadero} - \text{Valor Aprox.}|$$

$$E_r = \left| \frac{\text{Valor Verdadero} - \text{Valor Aprox.}}{\text{Valor Verdadero}} \right|$$

Error Relativo Porcentual (ε_a): Para procesos iterativos:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{\text{Aprox. Actual} - \text{Aprox. Anterior}}{\text{Aprox. Actual}} \right| \times 100\%$$

2. Raíces de Ecuaciones No Lineales

Método de Bisección (Intervalo cerrado): Si $f(a)f(b) < 0$, la raíz está en $[a, b]$.

$$x_r = \frac{a + b}{2}$$

Método de Newton-Raphson (Abierto): Requiere un valor inicial x_0 .

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método de la Secante: Aproxima la derivada de Newton-Raphson. Requiere x_{i-1} y x_i .

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Método de Punto Fijo: Se reescribe $f(x) = 0$ como $x = g(x)$.

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Condición de convergencia: $|g'(x)| < 1$ en la vecindad de la raíz.

3. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para un sistema $Ax = b$.

Métodos Iterativos: Se despeja x_j de la ecuación j -ésima. Para convergencia, A debe ser estrictamente diagonalmente dominante.

- **Jacobi:** Usa los valores de la iteración anterior (k) para hallar los nuevos ($k + 1$).

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- **Gauss-Seidel:** Usa los valores recién calculados en la iteración actual para acelerar la convergencia.

4. Interpolación y Ajuste

Polinomio Interpolante de Lagrange: Para $n + 1$ puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

Donde el coeficiente $L_i(x)$ es:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Diferencias Divididas de Newton:

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Con $b_0 = f(x_0)$, $b_1 = f[x_1, x_0]$, y en general:

$$f[x_k, \dots, x_0] = \frac{f[x_k, \dots, x_1] - f[x_{k-1}, \dots, x_0]}{x_k - x_0}$$

5. Integración Numérica

Sea $I = \int_a^b f(x) dx$ y $h = \frac{b-a}{n}$ (donde n es el número de subintervalos).

Método	Fórmula (Aplicación Múltiple)
--------	-------------------------------

Regla del Trapecio	$I \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$
---------------------------	---

Simpson 1/3 (Para n par)	$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,\dots}^{n-2} f(x_j)]$ (Predictor)
--------------------------------------	--

Simpson 3/8 (Para n múltiplo de 3)	$I \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + f(x_n)]$
--	--

6. Diferenciación Numérica

Aproximaciones de diferencias finitas (hacia adelante, hacia atrás y centradas). Las centradas son más precisas:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

7. Solución Numérica de EDOs

Para el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$, y tamaño de paso h .

Método de Euler (1er orden):

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Método de Euler Modificado (Heun):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)]$$

Runge-Kutta de 4to Orden (RK4):

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$